



МАЯТНИК С МОДУЛИРУЕМОЙ ДЛИНОЙ. I. Параметрический резонанс

Аннотация

В статье рассматривается параметрическое возбуждение простого жесткого маятника путем периодической модуляции его длины по кусочно-постоянному закону. Такую систему можно рассматривать как простейшую модель детских качелей. Аналитическое исследование физической системы сопровождается компьютерным моделированием. Детально обсуждаются превращения энергии, порог возбуждения и другие характеристики параметрического резонанса. Отмечается роль нелинейных эффектов в ограничении размаха резонансных колебаний. Дается представление о роли обратной связи, о фазовой синхронизации и о явлении параметрического авторезонанса.

Ключевые слова: параметрический резонанс, порог возбуждения, бифуркации, оптимальное управление, фазовая синхронизация, компьютерное моделирование.

1. ВВЕДЕНИЕ. ИССЛЕДУЕМАЯ ФИЗИЧЕСКАЯ СИСТЕМА

Возбуждение колебаний физической системы называется *параметрическим*, если оно осуществляется путем периодического изменения какого-либо параметра, характеризующего систему. В частности, колебания маятника можно возбудить параметрически, если точку подвеса привести в периодическое движение в вертикальном направлении. В неинерциальной системе отсчета, связанной с точкой подвеса, такое возбуждение маятника физически эквивалентно периодической модуляции поля тяготения. Эта простая на первый взгляд система демонстрирует удивительно много разнообразных регулярных и хаотических движений. Сотни научных статей посвящены исследованию маятника с осциллирующим подвесом (см., например, [1, 2] и приведенную там литературу).

Широко известная особенность поведения маятника с вертикально осциллирующим подвесом заключается в динамической стабилизации перевернутого положения. Такая стабилизация происходит, когда амплитуда и частота принудительных колебаний подвеса лежат в определенных интервалах (см., например, [2–6]).

Другой хорошо известный способ параметрического возбуждения маятника заключается в периодическом изменении его длины. Именно этот способ подробно изучается в данной статье. Во многих учебниках и статьях (см., например, [7–11]) такая физическая система рассматривается как простая модель детских качелей. Действительно, качели можно рассматривать как физический маятник, приведенная длина которого периодически изменяется из-за того, что стоящий на них ребенок сгибает ноги в коленях в положениях наибольшего отклонения и распрямляется каждый раз когда качели проходят через положение равновесия.

Явление параметрической раскачки маятника легко проиллюстрировать следующим простым экспериментом. Пропустим нить с подвешенным на конце грузиком сквозь небольшое колечко, закрепленное в штативе. Другой конец нити удерживаем в руке. Будем при колебаниях такого маятника немного подтягивать нить рукой каждый раз когда грузик проходит через нижнее положение, и отпускать нить до прежней длины в положениях наибольшего отклонения. Такие изменения длины маятника с периодом, вдвое меньшим периода его собственных колебаний, приводят к прогрессивному росту амплитуды колебаний.

Впечатляющий пример такого способа параметрического возбуждения колебаний маятника, дошедший до нас из средневековья, описан в замечательной книге Бейкера и Блэкберна «The Pendulum: A Case Study in Physics» [12: с. 27]. На севере Испании, в соборе небольшого города Santiago de Compostela, на длинном канате подвешено очень большое кадило для ладана, называемое *O Botafumeiro*, которое может раскачиваться, описывая гигантскую дугу над главным нефом собора (рис. 1). Во время богослужения колебания *O Botafumeiro* возбуждаются периодическими подтягиваниями и отпусканиями каната, перекинутого через блок, закрепленный высоко под сводом собора. Раскачку курильницы выполняет группа священнослужителей (называемых *tiraboleiros*). Каждый из них держит одну из строп свободного конца основного каната, свисающего с блока почти до пола. По ко-

манде главного зрителя они периодически подтягивают и отпускают стропы каната. Через несколько циклов раскачки размах колебаний кадила становится очень большим. Нижнюю часть своей гигантской дугообразной траектории курильница пролетает с огромной скоростью, извергая дым и языки пламени. Видеозаписи этого замечательного примера параметрической раскачки маятника можно найти в сети Интернет.

В данной статье рассматривается маятник с модулируемой длиной, который может раскачиваться в вертикальной плоскости в однородном поле тяжести. Чтобы маятник мог совершать колебания сколь угодно большой амплитуды и даже полные перевороты, будем считать, что он состоит из жесткого стержня пренебрежимо малой массы (а не гибкой нити) с массивным грузом на конце. Приведенную длину маятника можно изменять путем принудительных сдвигов груза вдоль стержня. Периодическая модуляция приведенной длины при определенных условиях может вызвать рост первоначально малых собственных колебаний маятника. Это явление называется параметрическим резонансом. Описание параметрического резонанса в более простых (линейных) системах можно найти в статьях [13–16].

2. МОДУЛЯЦИЯ ДЛИНЫ МАЯТНИКА ПО ПРЯМОУГОЛЬНОМУ ЗАКОНУ

Будем считать, что периодическая модуляция приведенной длины маятника происходит по прямоугольному (кусочно-постоянному) закону. Такой (несколько идеализиро-



Рис. 1. О. Botafumeiro

ванный) способ модуляции дает возможность сравнительно простого физического объяснения явления параметрического резонанса, вплоть до количественного анализа. Разработанная автором статьи специальная компьютерная программа [17] моделирует поведение этой системы. Компьютерное моделирование существенно помогает в исследовании изучаемого явления.

Приближение прямоугольной модуляции применимо к реальному маятнику при условии, что изменения длины происходят в течение промежутков времени, составляющих малую долю периода собственных колебаний. Будем считать, что резкие, почти мгновенные уменьшения и увеличения длины маятника происходят последовательно через промежутки времени, равные $T/2$, так что T есть полный период изменения длины маятника (период модуляции). Нетрудно понять, почему прямоугольная модуляция может привести к значительной раскачке маятника, если период и фаза модуляции выбраны должным образом.

Пусть, например, груз смещается вверх (в сторону оси маятника) в тот момент, когда маятник проходит через положение равновесия, то есть когда его скорость максимальна. При радиальных смещениях груза момент импульса маятника относительно оси вращения остается неизменным. Поэтому уменьшение момента инерции при смещении груза к оси сопровождается увеличением угловой скорости, и маятник получает дополнительную энергию. Чем больше скорость маятника, тем больше возрастает

его энергия. Эта энергия берется из источника, который сдвигает груз в сторону оси.

Напротив, когда груз мгновенно сдвигается вниз вдоль стержня качающегося маятника, угловая скорость и энергия маятника уменьшаются. Уменьшение энергии означает, что энергия возвращается источнику. Чтобы приращения энергии маятника происходили регулярно и превосходили возвращаемую энергию, то есть чтобы в целом модуляция длины систематически «подпитывала» маятник энергией, период и фаза модуляции должны удовлетворять определенным условиям.

В частности, наиболее быстрый рост амплитуды происходит, если приведенная длина маятника уменьшается каждый раз, когда он пересекает положение равновесия, и увеличивается до прежнего значения в положениях наибольшего отклонения, когда его скорость обращается в нуль. В таких условиях радиальные смещения груза вниз в прежнее положение не приводят к уменьшению энергии маятника. Таким образом, наиболее быстрый (резонансный) рост амплитуды происходит при условии, что два цикла модуляции длины совершаются на протяжении одного периода собственных колебаний маятника. Это основной параметрический резонанс. График таких колебаний в случае очень слабого трения (добротность $Q = 1500$) приведен на рис. 2, где также показана прямоугольная модуляция длины маятника.

В реальной системе рост амплитуды при параметрическом резонансе ограничивается

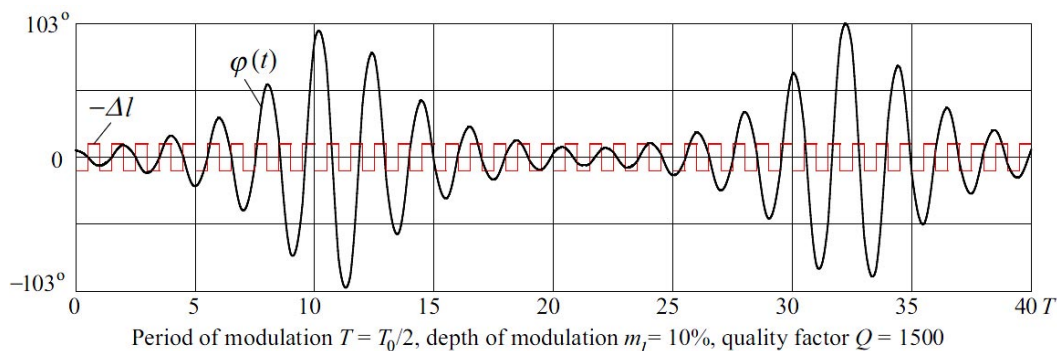


Рис. 2. Начальный экспоненциальный рост амплитуды колебаний в условиях параметрического резонанса 1-го порядка ($n = 1$), сопровождающийся биениями

нелинейными явлениями. В нелинейной системе, такой, как маятник, период собственных колебаний зависит от амплитуды. По мере роста размаха колебаний их период увеличивается. Однако в принятой модели физической системы период возбуждения (период модуляции длины) остается неизменным. Если условия параметрического возбуждения выполняются при малых колебаниях и амплитуда начинает расти, то условия резонанса нарушаются при больших амплитудах – система «выпадает» из резонанса. Фаза модуляции становится неблагоприятной для «подпитки» маятника энергией, и происходит обратная передача энергии от маятника к источнику модуляции. Это приводит к постепенному уменьшению амплитуды. При этом собственный период маятника начинает уменьшаться, и условия для роста амплитуды постепенно восстанавливаются. Колебания маятника приобретают характер биений, как это видно из рис. 2. Из-за трения эти переходные биения постепенно затухают, и амплитуда колебаний приближается к окончательному постоянному значению.

Детали процесса резонансного роста при параметрическом возбуждении маятника ($T = T_0/2$), сопровождающегося ограничени-

ем амплитуды из-за нелинейных явлений в случае значительной глубины модуляции и существенного трения ($m_l = 15\%$, $Q = 5.0$) показаны на рис. 3. Вертикальные отрезки фазовой траектории и графика $\dot{\varphi}(t)$ соответствуют мгновенным (скачкообразным) увеличениям и уменьшениям угловой скорости маятника в моменты смещений груза соответственно вверх и вниз вдоль стержня. Криволинейные участки фазовой траектории, скручивающиеся к началу координат, соответствуют движению маятника с трением в интервалах между скачкообразными перемещениями груза. Быстрый первоначальный рост амплитуды, описываемый раскручивающимися витками фазовой траектории, постепенно замедляется из-за удлинения собственного периода маятника. После достижения максимального значения 78.3° амплитуда поочередно убывает и возрастает в небольших пределах, приближаясь постепенно к окончательному значению 74° . Первоначально раскручивающаяся спираль фазовой траектории при этом приближается к предельному циклу, характерный вид которого можно видеть в левой части рис. 3.

Легко видеть, что энергия маятника может возрастать не только тогда, когда два цикла модуляции параметра происходят на

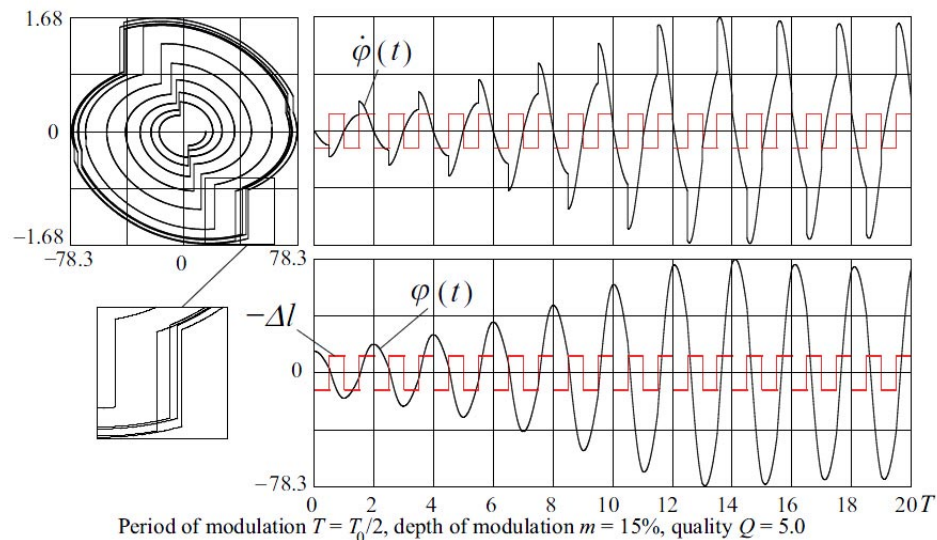


Рис. 3. Фазовая диаграмма ($\varphi - \dot{\varphi}$ плоскость, слева) и графики зависимости от времени (справа) угловой скорости $\dot{\varphi}(t)$ и угла отклонения $\varphi(t)$ для процесса резонансного роста, сопровождающегося ограничением амплитуды из-за нелинейных явлений. На графиках показана также прямоугольная модуляция длины маятника (верхние и нижние положения груза)

протяжении одного периода собственных колебаний маятника, но и когда два цикла модуляции приходятся на три, пять и вообще любое нечетное число собственных периодов. Это резонансы нечетных порядков. Ниже мы покажем, что передача энергии маятнику, хотя и менее эффективная, возможна также, когда два цикла модуляции происходят на протяжении четного числа периодов собственных колебаний (резонансы четных порядков).

3. ПОРОГ ПАРАМЕТРИЧЕСКОГО ВОЗБУЖДЕНИЯ

Отметим некоторые важные отличия параметрического резонанса от обычного резонанса, вызываемого непосредственным действием периодической внешней силы на колебательную систему. Изменения длины не могут вывести покоящийся маятник из положения равновесия: в противоположность прямому силовому возбуждению, параметрический резонанс возможен только если маятник совершает хотя бы небольшие собственные колебания. Параметрический резонанс происходит при следующих значениях частоты ω (или периода T) модуляции параметра:

$$\omega = \omega_n = \frac{2\omega_0}{n}, \quad T = T_n = \frac{nT_0}{2}, \quad n = 1, 2, \dots \quad (1)$$

Параметрический резонанс возможен не только при частотах ω_n , удовлетворяющих уравнению (1), но также в некоторых интервалах частот ω , лежащих по обе стороны от значений ω_n (в интервалах параметрической неустойчивости). Эти интервалы тем шире, чем больше глубина модуляции параметра.

Важное отличие параметрического резонанса от резонанса при вынужденных колебаниях связано с зависимостью роста энергии системы от энергии, уже запасенной в системе. В то время как при прямом силовом возбуждении приращение энергии за период пропорционально амплитуде колебаний, то есть квадратному корню из запасенной энергии, при параметрическом резонан-

се приращение энергии пропорционально самой запасенной энергии.

Потери энергии из-за трения также пропорциональны запасенной энергии. В случае прямого силового возбуждения потери энергии ограничивают рост амплитуды, так как эти потери с увеличением энергии растут быстрее, нежели вложение энергии за счет работы внешней силы, вызывающей резонанс. В случае параметрического резонанса как вложение энергии за счет модуляции параметра, так и потери из-за трения пропорциональны запасенной энергии: их отношение не зависит от амплитуды. Поэтому параметрический резонанс возможен только при превышении некоторого *порога возбуждения*, когда вложение энергии за период (вызванное модуляцией параметра) превосходит энергию, рассеиваемую за то же время. Пороговое значение глубины модуляции зависит от величины трения в системе. Но если порог возбуждения превышен, потери энергии из-за трения не в состоянии ограничить рост амплитуды. Стационарные колебания неизменной амплитуды, в конце концов, устанавливаются благодаря нелинейным свойствам маятника.

Для оценки порогового значения глубины модуляции можно воспользоваться энергетическими соображениями. Пусть в условиях основного параметрического резонанса изменения длины l маятника происходят между значениями $l_1 = l_0(1 + m_l)$ и $l_2 = l_0(1 - m_l)$, где m_l – безразмерная *глубина модуляции*. При подсчете изменения полной энергии маятника за период нет нужды беспокоиться о потенциальной энергии. Действительно, спустя период маятник опять оказывается в нижнем положении с грузом на той же высоте, то есть через период потенциальная энергия принимает прежнее значение. Поэтому нужно рассчитывать только изменение кинетической энергии маятника.

Найдем относительное приращение энергии $\Delta E/E$ за один цикл модуляции, а именно, между двумя последовательными прохождениями маятника через положение равновесия в противоположных направлениях. При первом прохождении кинетическая

энергия в расчете на единицу массы груза равна $v_1^2/2$, где v_1 – скорость груза. В этот момент груз сдвигается вверх, так что длина маятника изменяется от значения $l_0(1+m_l)$ до $l_0(1-m_l)$. При скачкообразных смещениях груза вдоль стержня маятника момент импульса $L = J\dot{\phi} = Ml^2\dot{\phi}$ сохраняется (здесь M – масса груза, $J = Ml^2$ – момент инерции относительно оси вращения). Поэтому угловая скорость изменяется в этот момент от $\dot{\phi}_1$ до $(1+m_l)^2/(1-m_l)^2 \dot{\phi}_1$. Это значит, что линейная скорость v груза изменяется от $v_1 = l_0(1+m_l)\dot{\phi}_1$ до $(1+m_l)/(1-m_l)v_1$. Затем маятник движется от вертикального положения $\varphi = 0$ до максимального отклонения φ_m , величину которого можно подсчитать на основании сохранения энергии:

$$\frac{1}{2}v_1^2\left(\frac{1+m_l}{1-m_l}\right)^2 = gl_0(1-m_l)(1-\cos\varphi_m). \quad (2)$$

Если частота и фаза модуляции соответствуют наиболее благоприятному режиму для подпитки маятника энергией, обратные скачкообразные перемещения груза к концу стержня происходят в моменты наибольших отклонений маятника (точнее, когда маятник находится вблизи этих положений). В такие моменты маятник имеет почти нулевую угловую скорость. Поэтому перемещение груза к концу стержня почти не изменяет кинетической энергии маятника. Длина маятника становится равной $l_0(1+m_l)$. Маятник начинает обратное движение к положению равновесия с нулевой скоростью. Скорость v_2 , которую маятник набирает в этом движении, как и в случае уравнения (2), можно найти на основе закона сохранения энергии:

$$\frac{1}{2}v_2^2 = gl_0(1+m_l)(1-\cos\varphi_m). \quad (3)$$

Из уравнений (2)–(3) находим:

$$v_2^2 = v_1^2\left(\frac{1+m_l}{1-m_l}\right)^3, \quad E_2 = E_1\left(\frac{1+m_l}{1-m_l}\right)^3, \quad (4)$$

где $E_2 = v_2^2/2$ – кинетическая энергия на единицу массы после завершения периода T модуляции. Поэтому

$$\frac{\Delta E}{E} = \frac{E_2}{E_1} - 1 = \left(\frac{1+m_l}{1-m_l}\right)^3 - 1 \approx 6m_l. \quad (5)$$

Последнее приближенное выражение в (5) справедливо при малых значениях глубины модуляции $m_l \ll 1$. Таким образом, относительное увеличение полной энергии маятника $\Delta E/E$ за один период модуляции T в условиях основного параметрического резонанса составляет приблизительно $6m_l$. Последовательность значений энергии E_n при очередных прохождениях через положение равновесия образует геометрическую прогрессию. Процесс, в котором увеличение энергии за период ΔE пропорционально запасенной энергии ($dE/dt \approx 6m_l E/T$), характеризуется в среднем экспоненциальным ростом энергии со временем:

$$E(t) = E_0 \exp\left(\frac{6m_l}{T}t\right) = E_0 \exp(\alpha t). \quad (6)$$

В данном случае показатель экспоненциального роста α пропорционален глубине модуляции m_l длины маятника: $\alpha = 6m_l/T$. В условиях точной настройки периода модуляции на основной резонанс ($T = T_0/2$) уменьшение энергии обусловлено почти исключительно трением. Рассеяние энергии из-за вязкого трения на протяжении целого числа собственных полупериодов (то есть при $t = nT = nT_0/2$) описывается следующим выражением:

$$E(t) = E_0 \exp(-2\gamma t), \quad (7)$$

где γ – постоянная затухания амплитуды. Сравнивая выражения (6) и (7), получаем следующую оценку порогового (минимального) значения $(m_l)_{\min}$ глубины модуляции для возбуждения основного параметрического резонанса:

$$(m_l)_{\min} = \frac{1}{3}\gamma T = \frac{1}{6}\gamma T_0 = \frac{\pi}{6Q}. \quad (8)$$

Здесь в качестве характеристики интенсивности вязкого трения в системе использована безразмерная величина – добротность $Q = \omega_0/(2\gamma)$.

Фазовая траектория и графики зависимости от времени угловой скорости и угла отклонения для колебаний малой амплитуды,

происходящих в условиях порога возбуждения (8), показаны на рис. 4. На графиках и на фазовой траектории видны лишь скачкообразные увеличения угловой скорости, происходящие дважды на протяжении одного периода колебаний (в моменты, когда груз маятника сдвигается вверх). Сдвиги вниз происходят в моменты, когда угловая скорость почти равна нулю. Поэтому соответствующие скачкообразные уменьшения скорости слишком малы, чтобы быть заметными на графиках. Такой режим колебаний, амплитуда которых остается неизменной, несмотря на рассеяние энергии, называется *параметрической регенерацией*. Компьютерное моделирование показывает, что режим параметрической регенерации устойчив по отношению к вариациям начальных условий: при других начальных условиях фазовая траектория и графики спустя некоторое время принимают ту же самую характерную форму. Однако этот режим неустойчив по отношению к вариациям параметров системы. Если трение чуть больше или глубина модуляции чуть меньше, чем требует условие (8), колебания постепенно затухают, несмотря на модуляцию длины. В противном случае амплитуда колебаний растет.

Для резонанса третьего порядка ($T = 3T_0/2$) пороговое значение глубины модуляции в три раза больше, чем для основного резонанса: $(m_l)_{\min} = \pi/(2Q)$. В данном случае два цикла модуляции длины происходят на протяжении трех периодов собственных колебаний. Радиальные смещения

груза маятника опять происходят в моменты, наиболее благоприятные для подпитки маятника энергией – вверх при прохождении через положение равновесия и вниз в положениях наибольшего отклонения. То же самое вложение энергии благодаря модуляции происходит за время, втрое большее, чем в случае основного резонанса.

Если глубина модуляции превышает пороговое значение, на первом этапе энергия первоначально малых колебаний маятника экспоненциально растет со временем. Этот начальный рост в условиях основного параметрического резонанса хорошо виден на рис. 5. Возрастание энергии по-прежнему описывается уравнением (6). Однако теперь показатель роста α определяется тем, насколько вложение энергии за счет параметрического возбуждения превышает потери энергии из-за трения: $\alpha = 6m_l/T - 2\gamma$. Пока амплитуда колебаний мала, запасенная энергия пропорциональна квадрату амплитуды. Поэтому на начальном этапе раскачки амплитуда параметрически возбуждаемых колебаний также экспоненциально растет со временем: $a(t) = a_0 \exp(\beta t)$. Показатель β роста амплитуды равен половине показателя роста энергии. В случае основного резонанса, когда вложения энергии происходят дважды на протяжении собственного периода, $\beta = 3m_l/T - \gamma = 6m_l/T_0 - \gamma = 3m_l\omega_0/\pi - \gamma$.

Если порог возбуждения превышен, амплитуда колебаний растет до тех пор, пока не нарушатся условия резонанса. В резуль-

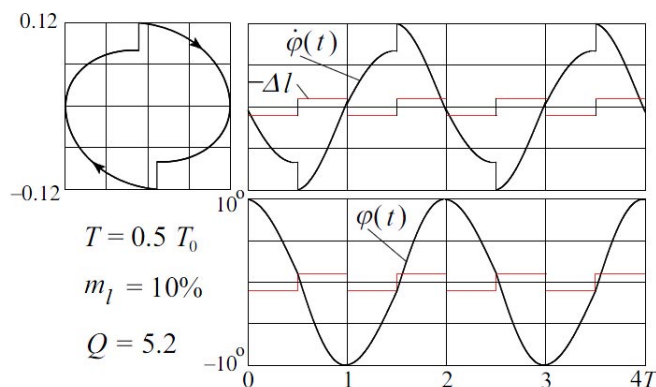


Рис. 4. Фазовая траектория (слева) и графики зависимости от времени угловой скорости и угла отклонения (справа) в условиях порога возбуждения $m_l \approx \pi/(6Q)$ для $T = T_0/2$

тате амплитуда начинает постепенно уменьшаться. При малых амплитудах собственный период становится меньше, условия резонанса восстанавливаются, амплитуда снова нарастает. Колебания маятника принимают характер биений. Благодаря трению, эти переходные биения постепенно затухают, и в конце концов устанавливаются стационарные колебания конечной амплитуды (рис. 5). Подчеркнем еще раз, что ограничение роста амплитуды обусловлено нелинейными свойствами маятника, а именно зависимостью собственного периода T_0 от амплитуды. При малых и умеренных значениях амплитуды φ_m эта зависимость приближенно дается формулой $T_0(\varphi_m) \approx T_{\text{small}}(1 + \varphi_m^2/16)$, где T_{small} – период бесконечно малых собственных колебаний. В противоположность обычному резонансу, наблюдаемому при прямом действии периодической силы на колебательную систему, одного лишь трения недостаточно для ограничения роста амплитуды при параметрическом резонансе. В идеализированной линейной системе при превышении порога амплитуда растет неограниченно (см. [15–16]).

4. ОБРАТНАЯ СВЯЗЬ, ПАРАМЕТРИЧЕСКИЙ АВТОРЕЗОНАНС, БИФУРКАЦИИ, МУЛЬТИСТАБИЛЬНОСТЬ

В приведенном выше анализе период модуляции T остается неизменным при ро-

сте амплитуды. В условиях точной настройки на основной резонанс этот период равен $T_0/2$, где T_0 – период малых собственных колебаний. Когда модель маятника с модулируемой длиной применяется для объяснения раскачки детских качелей, следует принимать во внимание, что раскачивающийся может заметить удлинение периода собственных колебаний по мере роста амплитуды и соответствующим образом реагировать на это, увеличивая период модуляции, так чтобы накачка оставалась в фазе с раскачиванием качелей. Такую интуитивную реакцию можно рассматривать как своего рода обратную связь: раскачивающийся определяет моменты приседания и выпрямления в зависимости от положения качелей. Мы можем включить обратную связь в нашу модель, потребовав, чтобы сдвиги груза маятника вверх происходили точно в моменты прохождения маятника через положение равновесия, а обратные сдвиги вниз к концу стержня – в моменты наибольшего отклонения маятника. Такие манипуляции обеспечивают оптимальное управление для получения наиболее быстрой раскачки.

На рис. 6 показан график прогрессивно растущих колебаний, происходящих в условиях оптимального управления с помощью обратной связи. Вначале период модуляции T удовлетворяет условию основного параметрического резонанса при малых амплитудах ($T = T_0/2$). Затем период модуляции увеличивается по мере роста амплитуды благодаря обратной связи. После возрастания

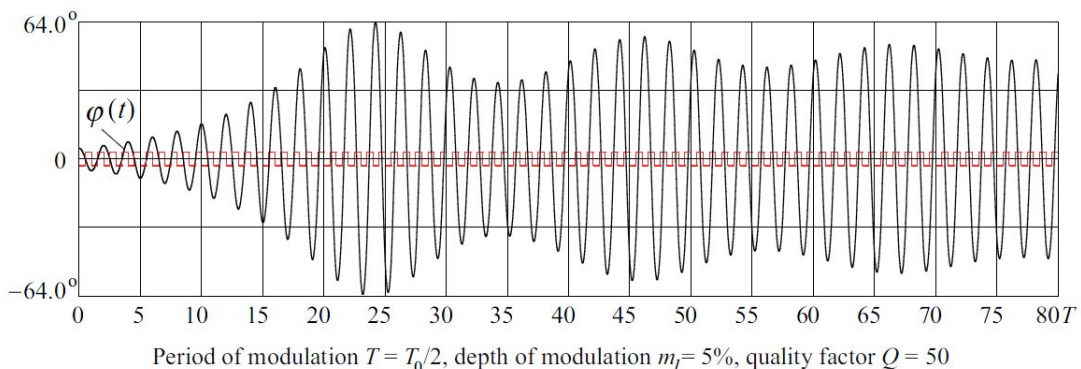


Рис. 5. Постепенно затухающие биения амплитуды колебаний в условиях параметрического резонанса первого порядка ($n = 1$)

амплитуды до 180° маятник совершает полные перевороты.

Несомненно, что монахи, раскачивающие кадило *O Botafumeiro*, тоже используют обратную связь (возможно, интуитивно) для управления поведением маятника. Они постепенно увеличивают период модуляции по мере роста амплитуды (и собственного периода), а затем уменьшают глубину модуляции до уровня, достаточного для компенсации потерь на трение, чтобы поддерживался желаемый размах колебаний.

Стратегия оптимального управления для наиболее быстрого гашения возбужденных колебаний с помощью обратной связи состоит в обращении фазы модуляции. Конкретно, длину маятника нужно увеличивать (сдвигать груз вниз) в моменты пересечения положения равновесия и уменьшать (сдвигать груз вверх) в положениях наибольшего отклонения.

Можно ли возбудить большие колебания маятника при малом превышении накачки над порогом без использования обратной связи, то есть без соответствующей подгонки периода и фазы модуляции в процессе роста амплитуды? Оказывается, что при определенных условиях становится возможным самопроизвольный фазовый захват между модуляцией и колебаниями маятника: маятник может автоматически подгонять амплитуду своих колебаний так, чтобы сохранялось соотношение фаз, необходимое для подпитки маятника энергией. Путем медленного изменения («сканирования») периода модуляции в процессе колебаний можно уп-

равлять амплитудой колебаний. Это явление называется *параметрическим авторезонансом*. Авторезонанс можно использовать как для возбуждения колебаний большого размаха при сравнительно слабой накачке, так и для управления величиной резонансного отклика в нелинейной системе.

Можно, например, начать параметрическую раскачку маятника путем модуляции его длины с периодом $T = T_0/2$, что соответствует условию возбуждения основного резонанса при бесконечно малой амплитуде. Будем затем в процессе колебаний медленно увеличивать период модуляции. Это можно делать ступенчато маленькими шагами. После очередного увеличения периода возбуждения будем ждать, пока переходный процесс (процесс установления колебаний при новых параметрах) почти не закончится. За это время амплитуда возрастет как раз настолько, чтобы увеличение собственного периода маятника соответствовало новому периоду модуляции. Таким образом, после каждого шага сканирования периода модуляции маятник остается в фазовом захвате с возбуждением.

Для иллюстрации явления параметрического авторезонанса в компьютерном моделировании (рис. 7) выбраны следующие значения параметра маятника: глубина модуляции 5%, добротность $Q = 20$. В процессе увеличения периода модуляции от $T = 0.5T_0$ до $T = 0.9T_0$ маятник раскачивается до амплитуды 153° . При $T = 0.90T_0$ происходит бифуркация нарушения симметрии: маятник отклоняется в одну сторону на угол

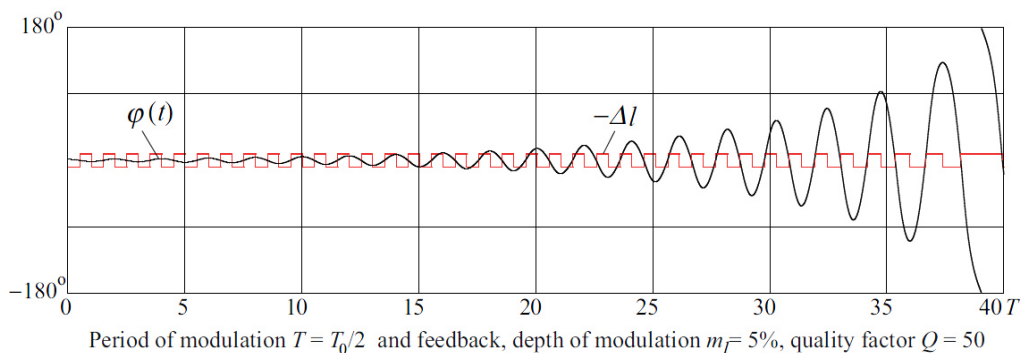


Рис.6. Параметрическая раскачка маятника с использованием обратной связи, обеспечивающей наиболее эффективную подпитку маятника энергией

161°, а в противоположную – лишь на 146°. Асимметрия колебаний увеличивается вплоть до $T = 0.913T_0$, когда происходит бифуркация удвоения периода: на протяжении двух циклов модуляции маятник совершает одно асимметричное колебание между отклонениями 161.39° и 146.88°, а на протяжении следующих двух циклов — между 161.49° и 144.25°. Затем весь процесс повторяется. Таким образом, один период колебания маятника охватывает теперь четыре периода модуляции. Соответствующие колебания показаны на рис. 7. Замкнутая фазовая траектория образована двумя почти сливающимися петлями. Такие асимметричные режимы существуют парами (при заданных значениях m и Q), фазовые орбиты которых представляют собой зеркальное отражение одна другой.

Дальнейшее увеличение периода модуляции крошечными шажками вызывает целый каскад сгущающихся бифуркаций удвоения периода, который заканчивается кризисом при $T = 0.9148T_0$: колебания маятника теряют устойчивость, рано или поздно он совершает переворот через верхнее положение равновесия, и затем, после длительного переходного процесса нерегулярных колебаний постепенно убывающей амплитуды, маятник приходит в конце концов в нижнее вертикальное положение.

Стационарные параметрические колебания большой амплитуды в условиях фазово-

го захвата при возбуждении с малой или умеренной глубиной модуляции длины маятника (подобные описанным выше и показанным на рис. 7) можно возбудить не только путем медленного сканирования периода модуляции, но также и заданием подходящих начальных условий. Система приходит в конце концов в определенный периодический режим (предельный цикл, или аттрактор), если начальные условия выбраны в пределах бассейна притяжения этого режима. В нелинейной системе несколько различных периодических режимов могут сосуществовать при одних и тех же значениях параметров системы. Это свойство называется мультистабильностью.

Пример мультистабильности показан на рис. 8. Кривая 1 описывает стационарные периодические колебания маятника конечной амплитуды, соответствующие основному параметрическому резонансу. Один период таких колебаний покрывает два цикла модуляции. Кривые 2 и 3 (нижняя часть рис. 8) соответствуют однонаправленным вращениям маятника по и против часовой стрелки соответственно. Маятник совершает один оборот на протяжении одного цикла модуляции. Еще один аттрактор представлен единственной точкой в начале координат фазовой плоскости. Он описывает состояние покоя маятника в нижнем вертикальном положении. Каждый из таких различных режимов, существующих при одних и тех же

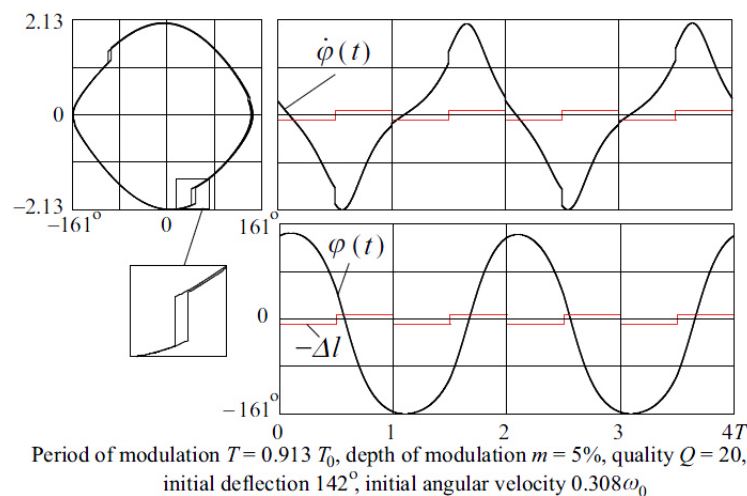


Рис. 7. Бифуркация удвоения периода в параметрическом авторезонансе

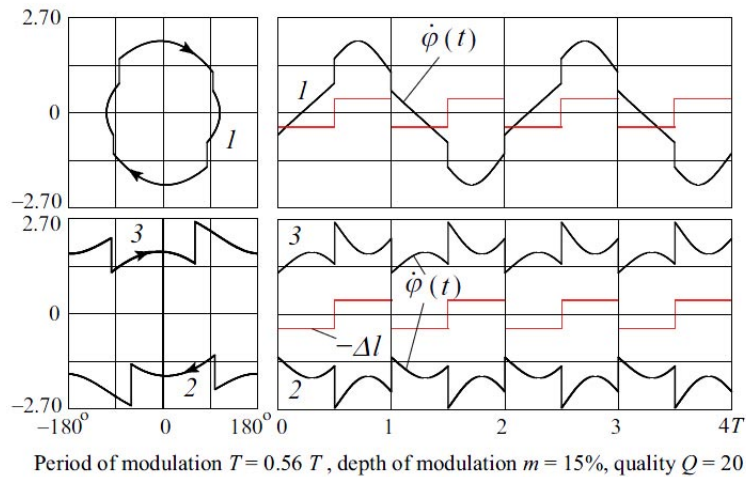


Рис. 8. Стационарные периодические колебания и вращения, происходящие при одних и тех же параметрах системы

значениях параметров маятника и возбуждения, характеризуется определенным бассейном притяжения на фазовой плоскости начальных состояний.

Во второй части этой статьи будет рассмотрено математически более строгое описание параметрического резонанса при прямоугольной кусочно-постоянной модуляции параметра и найдены аналитические выражения для частотных интервалов параметрической неустойчивости.

5. ЗАКЛЮЧИТЕЛЬНЫЕ ЗАМЕЧАНИЯ

В этой статье мы рассмотрели маятник, длина которого подвержена модуляции по прямоугольному кусочно-постоянному закону. Такая модель дает удобный пример, в котором все особенности явления параметрического резонанса в нелинейной системе допускают ясное физическое истолкование. Порог параметрического резонанса легко рассчитывается на основе энергетических соображений.

В линейной системе при превышении порога параметрического возбуждения амплитуда колебаний экспоненциально нарастает со временем. В отличие от вынужденных колебаний, возбуждаемых прямым действием периодической внешней силы, вяз-

кое трение не в состоянии ограничить рост амплитуды при параметрическом резонансе. В реальной системе, такой, как маятник, рост амплитуды ограничен нелинейными эффектами, благодаря которым собственный период зависит от амплитуды. Увеличение размаха колебаний маятника при резонансе приводит к удлинению собственного периода. Система выбивается из резонанса, размах колебаний уменьшается, и условия резонанса восстанавливаются. Возникают переходные биения, постепенно затухающие из-за трения, и в конце концов устанавливаются колебания конечного постоянного размаха.

Компьютерное моделирование движения системы (см. [17]) существенно облегчает понимание физических причин ограничения роста амплитуды, происходящего при превышении порога возбуждения параметрического резонанса из-за нелинейных свойств маятника. Моделирование иллюстрирует явление параметрического авторезонанса, а также доказывает существование стационарных периодических колебательных и вращательных режимов, возможных благодаря фазовому захвату между возбуждением и собственными колебаниями маятника. Компьютерное моделирование позволяет обнаружить также бифуркации нарушения симметрии и интригующие последовательности удвоений периода.

Литература

1. Broer H. W., Hoveijn I., M. van Noort, Simó C., Vegter G. The Parametrically Forced Pendulum: A Case Study in $1\frac{1}{2}$ Degree of Freedom, J. Dynamics and Differential Equations, **16** (2004) 897–947.
2. Butikov E.I. On the dynamic stabilization of an inverted pendulum, Am. J. Phys. **69**. (2001) 755–768.
3. Butikov E.I. Subharmonic Resonances of the Parametrically Driven Pendulum, J. Phys. A: Math. and Gen. **35** (2002) 6209–6231.
4. Butikov E.I. Regular and Chaotic Motions of the Parametrically Forced Pendulum: Theory and Simulations, in: Computational Science – ICCS 2002 (Springer Verlag, 2002, LNCS 2331, 2009. P. 1154–1169).
5. Бутиков Е.И. Стабилизация перевернутого маятника (60 лет маятнику Капицы) // Компьютерные инструменты в образовании, 2010. № 5. С. 40–51.
6. Butikov E.I. An improved criterion for Kapitza's pendulum stability, J. Phys. A: Math. and Theor. **44** (2011), 295202 (16 pp).
7. S. M. Curry, How children swing, Am. J. Phys. **44** (1976) 924–926.
8. P. L. Tea Jr., H. Falk, Pumping on a swing, Am. J. Phys. **36** (1968) 1165–1166.
9. W. Case, The pumping of a swing from the standing position, Am. J. Phys. **64** (1996) 215–220.
10. M. A. Pinsky, A. A. Zevin, Oscillations of a pendulum with a periodically varying length and a model of swing, Int. J. Non-Linear Mech. **34** (1999) 105–109.
11. D. Stilling, W. Szyskowski, Controlling angular oscillations through mass reconfiguration: a variable length pendulum case, Int. J. Non-Linear Mech. **37** (2002) 89–99.
12. G. L. Baker, J. A. Blackburn, The Pendulum: A Case Study in Physics, Oxford University Press, 2005.
13. Бутиков Е.И. Параметрический резонанс // Компьютерные инструменты в образовании, 2009. № 3. С. 22–40.
14. Butikov E.I. Parametric resonance, Comput. Sci. Eng. (1999) 76–83.
15. Butikov E.I. Parametric excitation of a linear oscillator, Eur. J. Phys. **25** (2004) 535–554.
16. Butikov E.I. Parametric resonance in a linear oscillator at square-wave modulation, Eur. J. Phys. **26** (2005) 157–174.
17. Butikov E.I. Pendulum with a square-wave modulated length (simulation program) / <http://faculty.ifmo.ru/butikov/Applets/PendParSquare.html> (дата обращения 28.06.2013).

PENDULUM WITH A MODULATED LENGTH. PART I. PARAMETRIC RESONANCE

Abstract

Parametric excitation of a rigid planar pendulum caused by a square-wave modulation of its length is investigated both analytically and with the help of computer simulations. Such a system can be considered as a simple model of a playground swing. Transformations of energy, the threshold of excitation and other characteristics of parametric resonance are discussed in detail. The role of nonlinear properties of the pendulum in restricting the resonant swinging is emphasized. The feedback providing optimal control of pumping and damping is analyzed. Phase locking between the drive and the pendulum at large amplitudes and the phenomenon of parametric autoresonance are discussed..

Keywords: parametric resonance, threshold of excitation, bifurcations, optimal control, phase locking, computer simulations.



Наши авторы, 2013.
Our authors, 2013.

Бутиков Евгений Иванович,
профессор физического факультета
СПбГУ,
eugene.butikov@gmail.com.